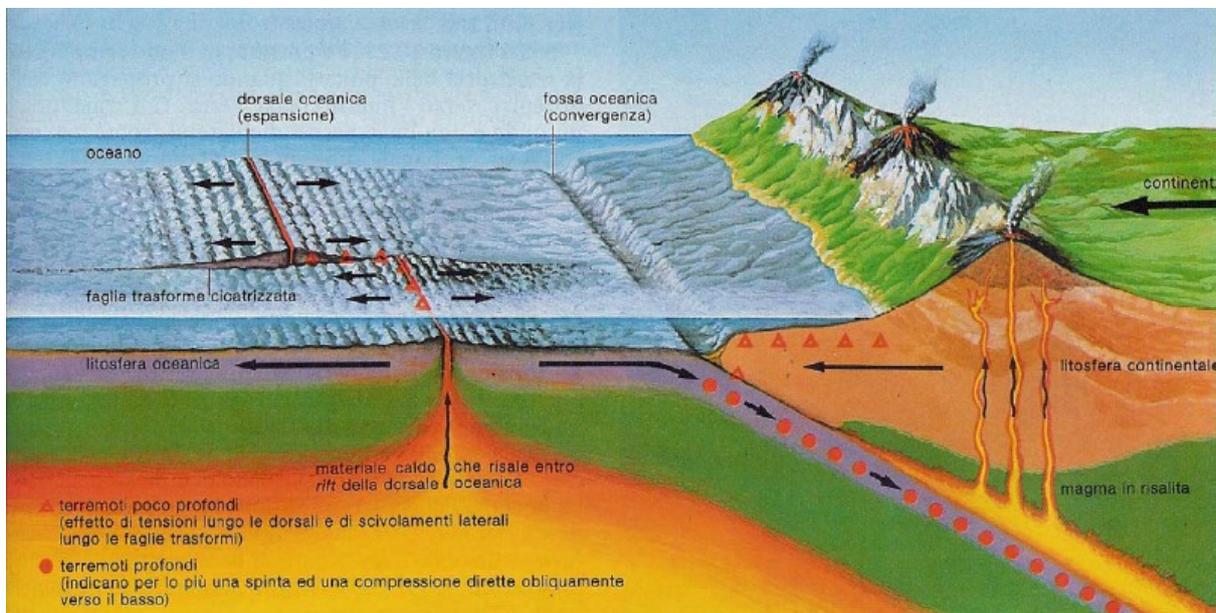


DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'UNIVERSITA' DEGLI  
STUDI ROMA III



*Laurea magistrale in Ingegneria Civile per la Protezione dai  
Rischi Naturali (Dm 270)*

**Corso di costruzioni in zona sismica  
Modulo di Determinazione della pericolosità sismica**



**F.Sabetta**

*fabio.sabetta@uniroma3.it*

**1.**

**Presentazione del corso  
Struttura del globo terrestre**

**Deriva dei continenti**

**Tettonica a placche**

**Equazione del moto in un mezzo omogeneo e isotropo**

**Onde sismiche di volume e superficiali**

**Anno accademico 2024/25**

<i>Presentazione del corso</i> .....	3
<i>Introduzione</i> .....	5
<i>Struttura del globo terrestre</i> .....	6
<i>Deriva dei continenti</i> .....	8
<i>Tettonica a placche</i> .....	9
<i>Evidenze della tettonica a placche</i> .....	13
<i>Tettonica dell'area Euro-mediterranea</i> .....	17
<i>Origine dei terremoti</i> .....	18
<i>Equation of motion and Hooke's law</i> .....	19
<i>Wave equation. Body Waves (P and S)</i> .....	21
<i>One dimensional wave solutions</i> .....	22
<i>Surface Waves</i> .....	25
Raleigh waves .....	26
Love waves.....	27

## Presentazione del corso

### Obiettivi formativi

Illustrare le caratteristiche del moto sismico a partire dalla genesi del terremoto e dalla propagazione delle onde sismiche, fino alle registrazioni locali, alle diverse rappresentazioni dell'azione sismica e al calcolo della pericolosità sismica, sia attraverso l'esposizione dei principali argomenti della materia, sia sollecitando attività di esercitazione da parte degli studenti.

### Crediti Formativi Universitari (CFU)

3

### Durata in ore

23

### Materiale Didattico

Dispense fornite dal docente, esercizi, software, bibliografia, indirizzi WEB.

### Testi di consultazione consigliati

Faccioli E., Paolucci R. (2005) Elementi di Sismologia applicata all'Ingegneria. *Pitagora Editrice, Bologna*.

Kramer, S.L. (1996) - Geotechnical Earthquake Engineering. *Prentice-Hall*.

Reiter, S.L. (1990) - Earthquake Hazard Analysis: Issues and Insights. *Columbia University Press*.

Shearer P.M. (1999) - Introduction to seismology. *Cambridge University Press*.

Romeo, R.W. (2007) La risposta sismica locale per la progettazione strutturale. *International Centre for Mechanical Sciences - CISM e-book*.

Gli argomenti trattati nel corso sono particolarmente numerosi e vasti e, come risultato inevitabile, la loro trattazione è in alcuni casi appena accennata anche se sono stati sviluppati in modo particolare tutti gli aspetti che hanno particolare rilevanza nell'ambito **dell'Ingegneria sismica**.

In effetti il nome più adatto per le materie trattate in questo corso sarebbe quello che in inglese viene normalmente indicato con "**Engineering Seismology**" (le diapositive e le dispense sono per la maggioranza in lingua inglese)

L'"Engineering Seismology" è una disciplina che si pone a cavallo tra Sismologia ed Ingegneria sismica proponendosi essenzialmente di rispondere a queste domande:

- Come si manifesta il moto sismico del suolo che produce danni alle strutture?
- Quali sono i fattori che lo influenzano più significativamente?
- Quali sono le caratteristiche del moto più rilevanti e come possono essere tradotte in azioni sismiche (di progetto) sulle strutture?
- Come può essere misurata la pericolosità sismica di una regione o di un sito?

Di particolare importanza, per gli studenti di ingegneria, è acquisire **familiarità con il vocabolario base della sismologia** e con alcuni concetti, generalmente non compresi nei corsi di progettazione in zona sismica, quali il **momento sismico o i meccanismi focali**.

Gli ingegneri che seguono corsi di “Engineering Seismology” a volte si lamentano di non disporre alla fine del corso di una **semplice serie di strumenti che consenta loro di affrontare qualsiasi problema sismologico** che può presentarsi nella pratica professionale.

Il punto è che ogni tentativo volto a ridurre, ad es. la valutazione della pericolosità sismica, a una semplice “checklist” di operazioni da eseguire, si scontra col fatto che **ogni singolo caso è praticamente “unico” e affetto da notevoli incertezze**.

Lo scopo di questo corso è quindi quello di **fornire agli ingegneri una serie di strumenti, quali equazioni, database, procedure** che possano essere impiegati nella valutazione della pericolosità sismica e nella progettazione delle strutture.

Va sottolineato che in qualsiasi applicazione di “Engineering Seismology” vi è sempre una elevata componente di **soggettività** (spesso indicata come “giudizio esperto”) che **non può essere affrontata in un corso di 24 ore** e che necessita inevitabilmente dell'**esperienza** che si acquisisce solo con la pratica professionale

	Argomento	N° ore
1	Presentazione del modulo. Struttura del globo terrestre. Deriva dei continenti. Equazione del moto. Onde sismiche	2
2	Propagazione delle onde sismiche. Geometria delle faglie e meccanismi focali.	2
3	ESERCITAZIONI sul calcolo della pericolosità per la tesina di esonero. <b>software CRISIS, Qgis, In-Spector, Seismosignal</b>	3
4	Sismometri e sismogrammi. Localizzazione epicentrale.	2
5	Magnitudo e intensità. Scale macrosismiche. Terremoti in Italia e nel mondo.	2
6	Accelerometria. Processamento dati. Trasformata di Fourier. Modello di Brune. Reti e banche dati	2
7	Caratterizzazione ingegneristica del moto del terreno. Effetti di sito	2
8	Microzonazione. Attenuazione e GMPE's	2
9	Pericolosità sismica deterministica e probabilistica. Approccio di Cornell. Dati di input.	2
10	Calcolo della pericolosità. Spettri a pericolosità uniforme. Disaggregazione. Valutazione delle incertezze nel calcolo della pericolosità.	2
11	Mappe di pericolosità. Classificazione e normativa sismica.	2

## MATERIALE DIDATTICO

Dispense e software scaricabili da

<http://www.romatrestrutture.eu/course/earthquake-engineering/>

**Materiale per esercitazioni e software**

Cominciate subito a installare alcuni sw che trovate nella cartella **Esercizi e software**

1. QGIS-OSGeo4W-2.0.1-3-Setup-x86.exe (Quantum-GIS sistema informat territoriale)
2. SetupR-CRISIS x64.msi (CRISIS 2020 per analisi pericolosità)
3. InSpector\_REV007\_x64.exe (sw per scalare accelerogrammi spettro-compatibili)
4. Spettri-NTC18 ver1.0.3.xlsx (Sw normativa)

SeismoSignal\_Release\_1.exe (sw per analisi accelerogrammi, 30gg trial vers.  
Mantenere questa vers anche se più vecchia)

**Attenzione per fare girare i software bisogna impostare il PC (impost internaz) in modo che il separatore dei decimali sia il punto!!!!**

PER CHIARIMENTI E INFORMAZIONI  
[fabio.sabetta@uniroma3.it](mailto:fabio.sabetta@uniroma3.it)

F. Sabetta 1. 6

## Introduzione



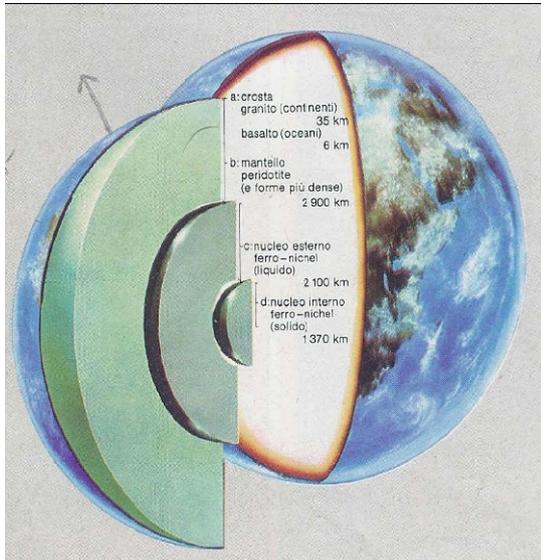
Il terremoto è un movimento del terreno causato da onde sismiche che si propagano a partire dalla rottura di una faglia. L'energia accumulata in anni di lenta deformazione della roccia viene liberata, sotto forma di onde sismiche, in pochi secondi al momento della rottura lungo la faglia.

circa due miliardi di persone vivono in zone esposte ai terremoti  
vittime dei terremoti dall'inizio del secolo: circa 1.400.000 nel mondo  
circa 150.000 in Italia

# Struttura del globo terrestre

L'idea che la terra potesse avere una crosta va attribuita a Cartesio (1596-1650) (roccia su interno di metallo).

Leibnitz (1646-1716) pensava che da uno stato iniziale di incandescenza fuso la crosta si fosse solidificata per raffreddamento.

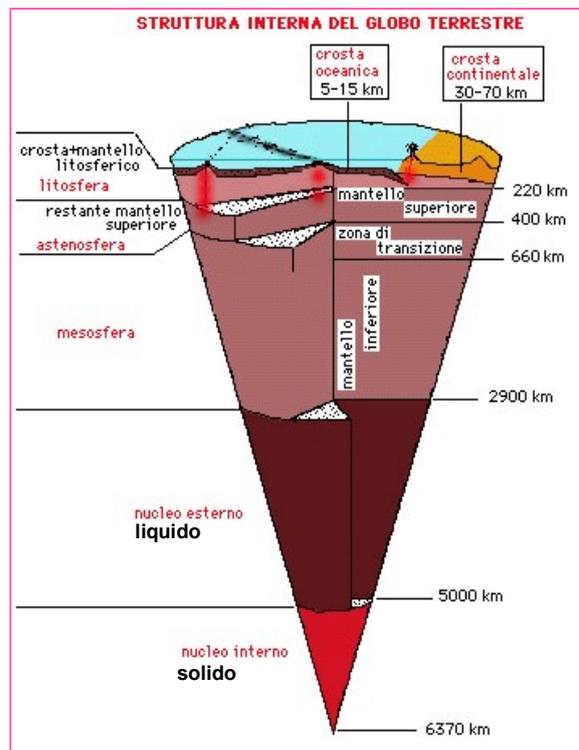
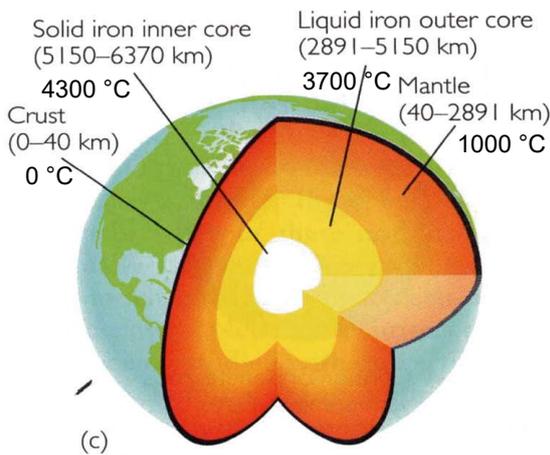


Raggio medio	6.371 Km
Circonferenza	40.000 Km
Massa	$6 \times 10^{21}$ t
Densità media	5.2 t/m <sup>3</sup>

## Suddivisione in composizione (sfere concentriche)

Le sfere sono separate da discontinuità (ad es. tra crosta e mantello vi è la discontinuità di Moho)

CROSTA	( $\rho = 2.7-3.0$ t/mc) SIAL (silicio e alluminio)
MANTELLO	( $\rho = 3.3-4.3$ t/mc) SIMA (silicio, ferro e magnesio)
NUCLEO	( $\rho = 9.9-13.1$ t/mc) NIFE (nicel ferro)



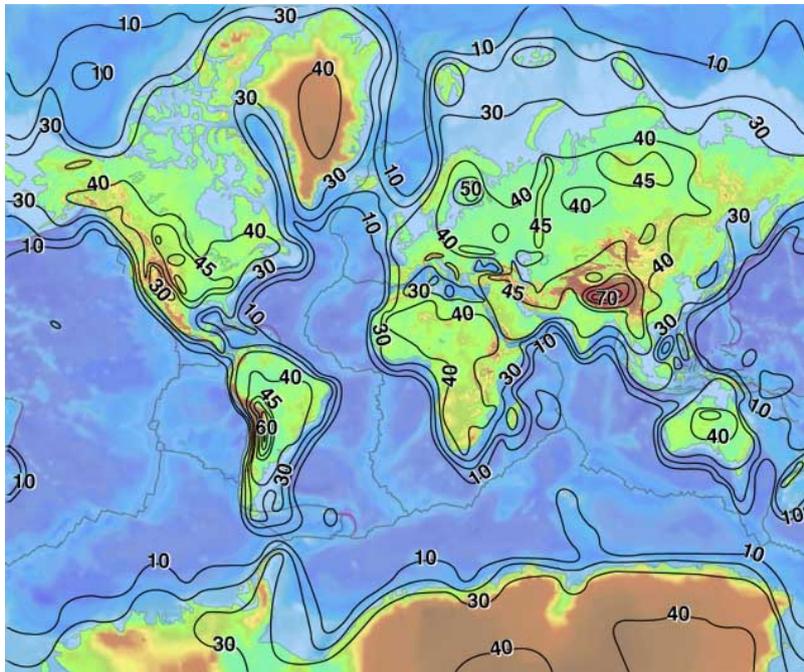
### Struttura della parte superiore

**Litosfera** 0-200 km, crosta e parte superiore del mantello, zona più fredda, rigida e fragile.

**Astenosfera** fino a circa 400 km, mantello allo stato parzialmente fuso, zona di relativa viscosità e plasticità.

**Mesosfera** fino circa 2900 km, mantello inferiore fluido

TERREMOTI

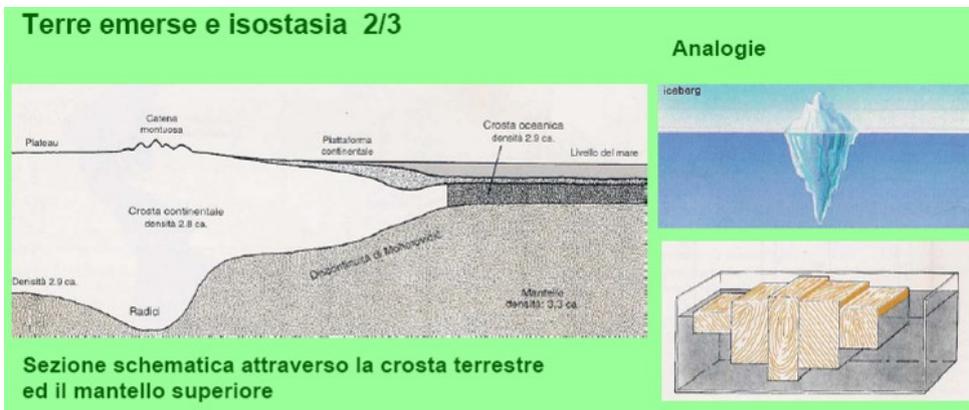


**Spessore della crosta**  
(CRUST 5.1 model Mooney et al., 1998) .

Le isolinee sono tracciate ad intervalli di 10 km.

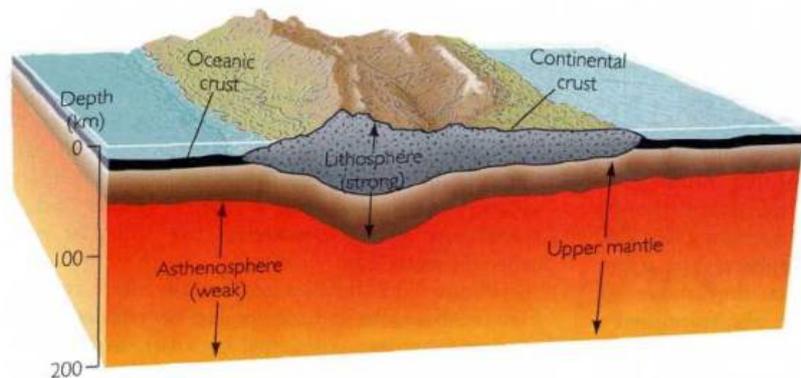
I continenti e i loro margini sono per lo più racchiusi dalle isolinee di spessore 30 km ad eccezione di Groenlandia, Sud America, Antartide, Eurasia dove si raggiungono spessori di 45-50 km.

La crosta continentale con spessore maggiore di 50 km è piuttosto rara (Himalaya) e rappresenta meno del 10%.

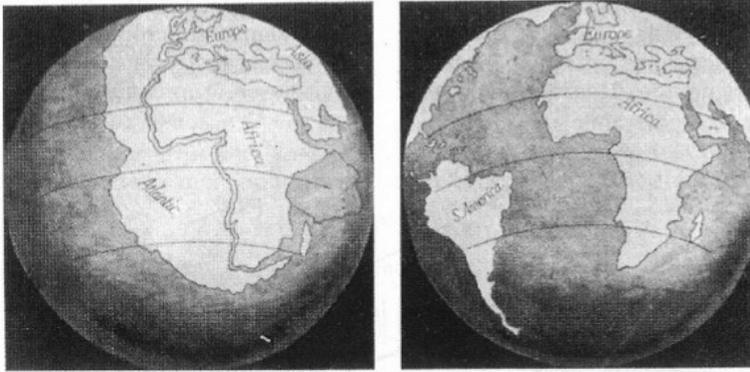


I terremoti avvengono principalmente nella **litosfera (crostali 0-50 km; profondi 50-200 km)** Solo nelle zone di **subduzione** viene interessata anche l'**astenosfera** e si può arrivare fino a 600 km di profondità

Lay and Wallace, 1995.



## Deriva dei continenti

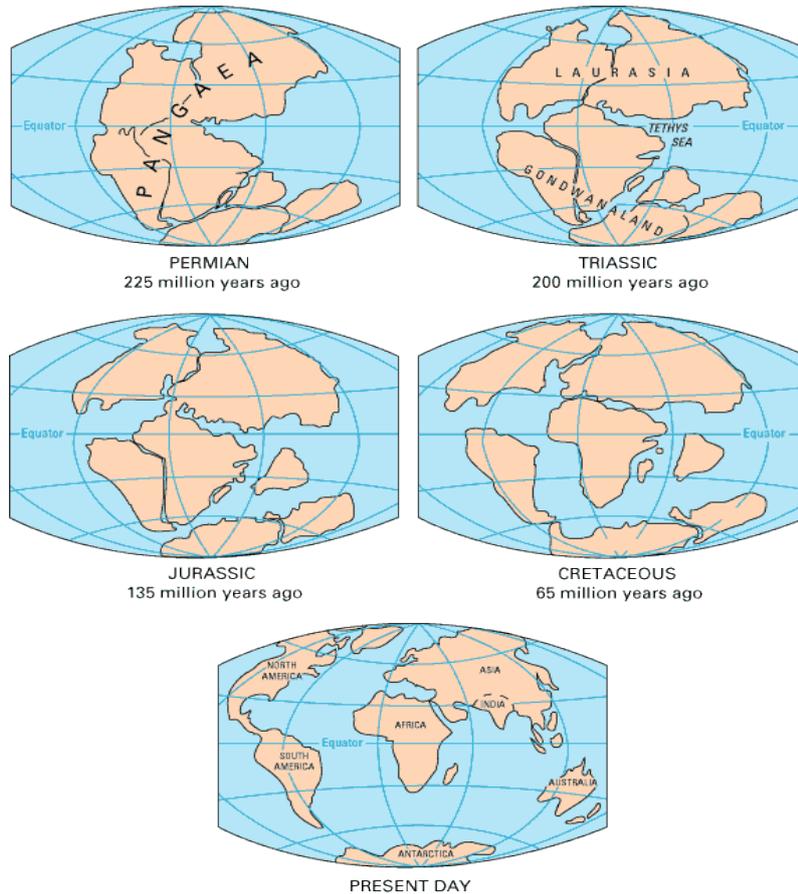


La prima ipotesi fu formulata da A. Snider nel 1858 per giustificare come molte delle piante fossili del Nord America fossero simili a quelle dell'Europa

Successivamente Taylor nel 1910 pubblica una teoria sulla deriva dei continenti secondo la quale le terre emerse provengono dalle due calotte polari. Le terre, chiamate Laurasia a nord e Gondwana a sud, si erano espanse rompendosi in enormi "zattere" ed erano migrate verso l'equatore.

L'origine di questi movimenti di crosta era ricercata nelle forze di marea esercitate dalla luna supposta un tempo più vicina alla Terra.

Questa spiegazione insostenibile fu il motivo per cui le ipotesi di Taylor ricevettero scarsa attenzione.



La tettonica a placche nasce dalla teoria della **deriva dei continenti**, formulata nel 1915 dal geofisico tedesco Alfred Wegener.

Osservando i margini dell'America meridionale e dell'Africa, Wegener pensò che questi due continenti un tempo fossero stati uniti. In base a questa e ad altre osservazioni, ipotizzò che i continenti attuali si fossero formati dallo smembramento di un unico supercontinente che chiamò **Pangea**

L'intuizione non era molto lontana da quanto venne confermato da una lunga serie di scoperte successive, ma rimase ignorata dal mondo scientifico per quasi 50 anni. Le prime conferme alle ipotesi di Wegener si ebbero con la scoperta delle **dorsali** e delle **fosse oceaniche**.

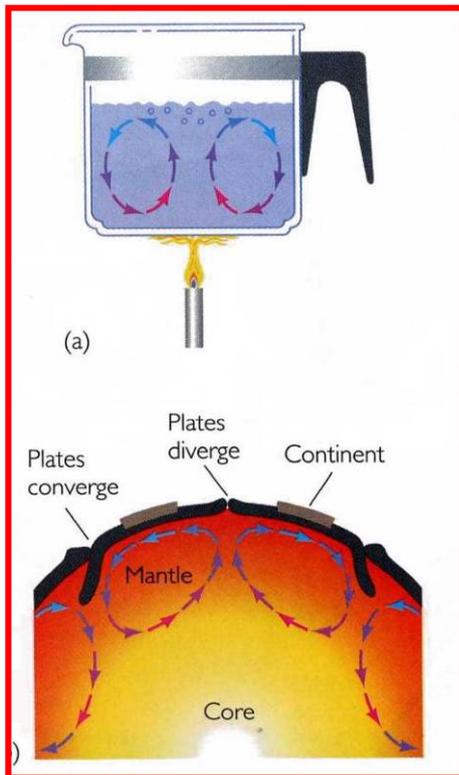
## Tettonica a placche

Nel 1928 Holmes suggerì, in analogia alla circolazione dei venti, la possibilità di correnti convettive in una zona all'interno della terra (oggi conosciuta come mantello superiore)

In corrispondenza delle correnti in risalita i continenti si smembravano e il materiale in risalita compensava l'apertura della crosta. Holmes capì l'essenza del meccanismo di apertura del fondo degli oceani, ma il suo pensiero ebbe un impatto minimo.

Solo a metà degli anni '60, misure geofisiche e studi di paleomagnetismo, portarono all'affermazione che la deriva dei continenti e l'apertura dei fondi oceanici è una realtà.

**Mentre secondo la teoria della deriva dei continenti erano i continenti a muoversi, nella tettonica a placche sono le placche a muoversi. Per placca deve intendersi una porzione della crosta terrestre**



La maggior parte dell'attività sismica, del vulcanismo e delle deformazioni della crosta sono concentrate ai confini delle placche dove troviamo regimi tettonici differenti

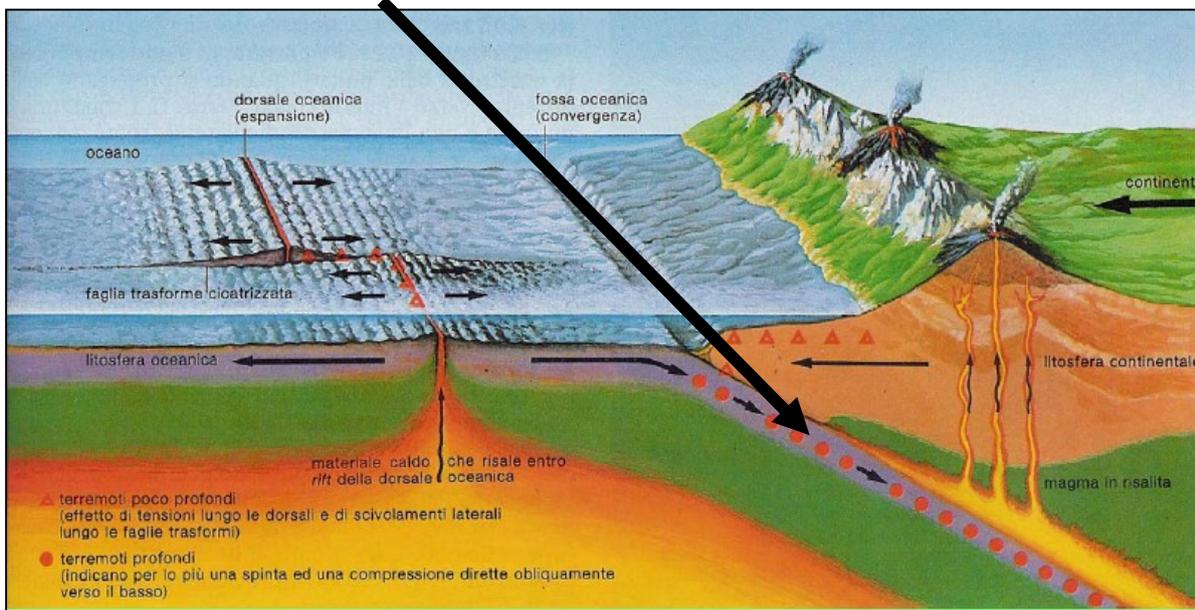
I tre tipi principali sono:

Limiti di placche **convergenti**, quando le placche si avvicinano

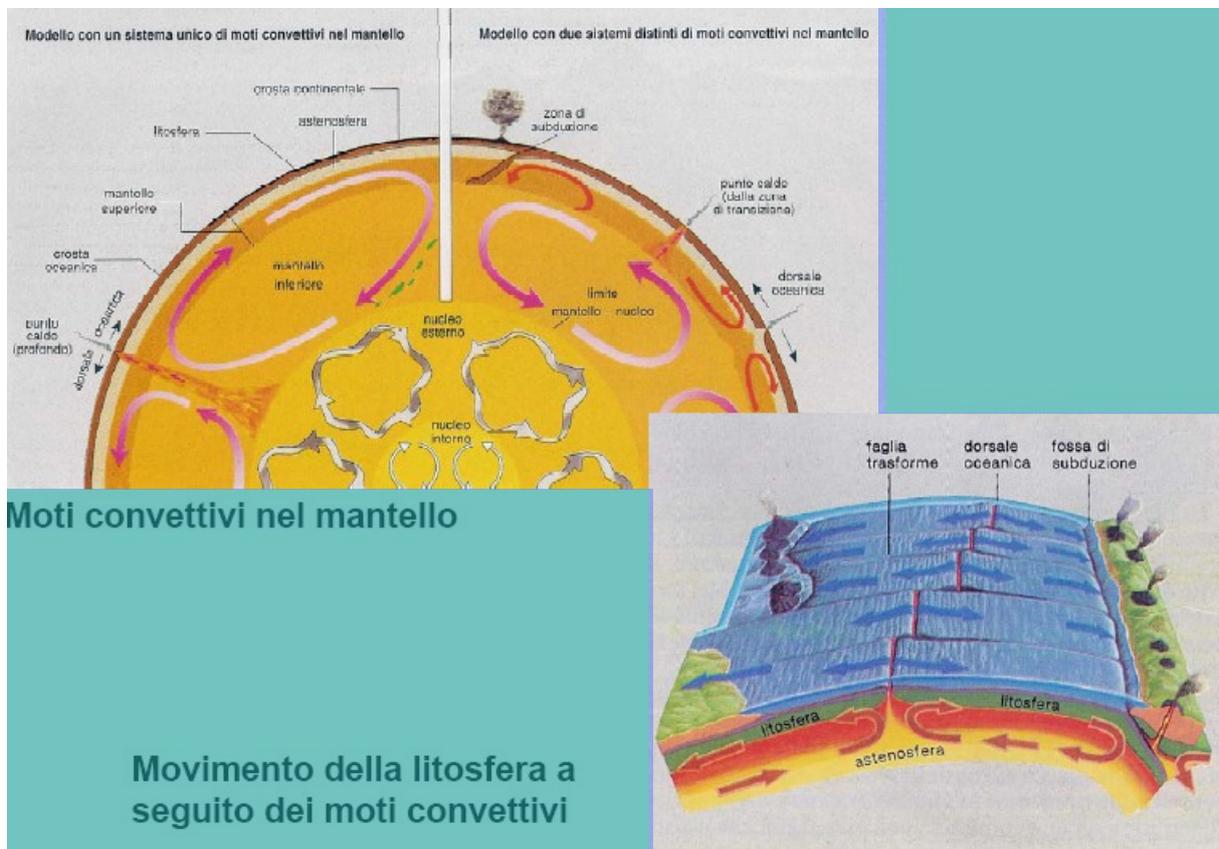
Limiti di placche **divergenti**, quando le placche si allontanano

Limiti di placche **trasformi o trascorrenti** quando le placche si muovono orizzontalmente le une accanto alle altre

Le correnti convettive nel mantello provocano, lungo le dorsali, la risalita di lava che rinnova la crosta oceanica provocandone un'espansione che viene equilibrata dall'assorbimento per subduzione in corrispondenza delle fosse oceaniche. Nelle zone di **subduzione** gli ipocentri dei terremoti sono disposti lungo piani inclinati che possono discendere fino a 600 km di profondità, denominati **piani di "Wadati-Benioff"** (dal nome dei sismologi che per primi li hanno studiati).

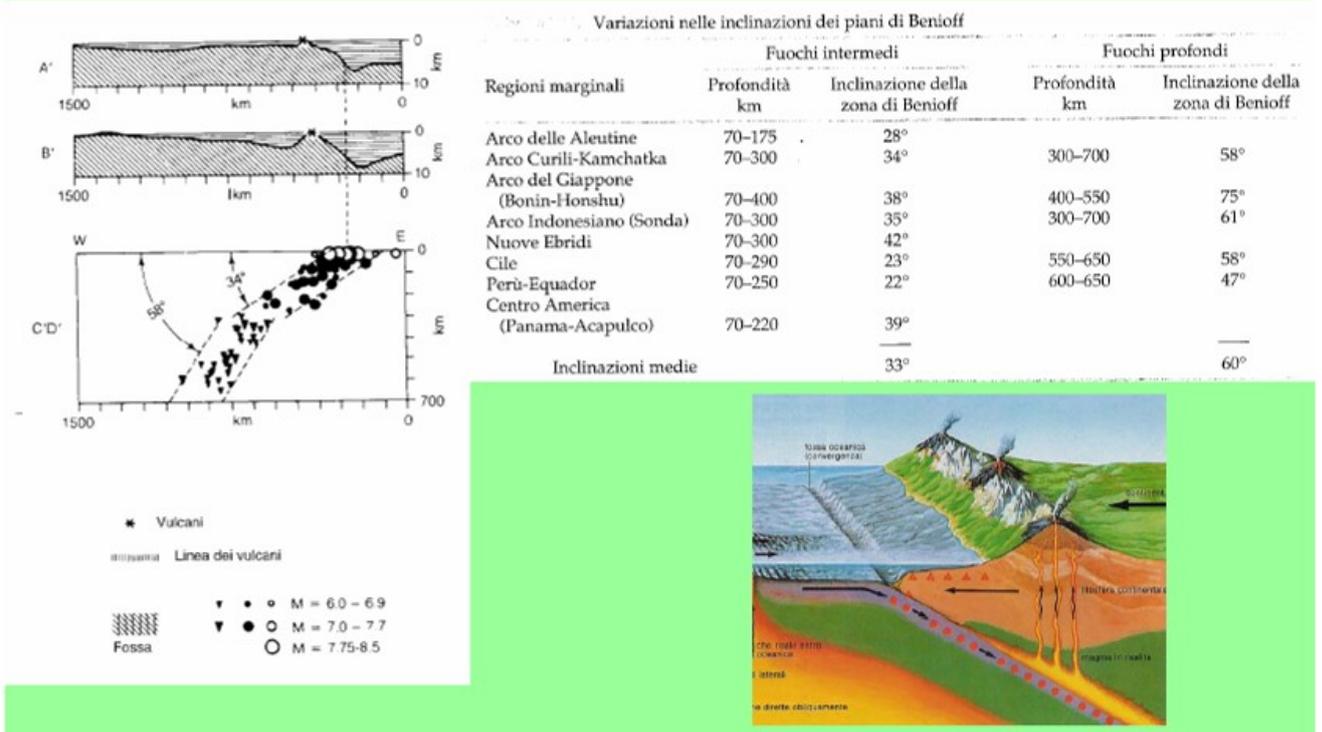


Movimento delle placche a partire da un margine divergente verso un margine convergente (subduzione) e relativa attività sismico-vulcanica.



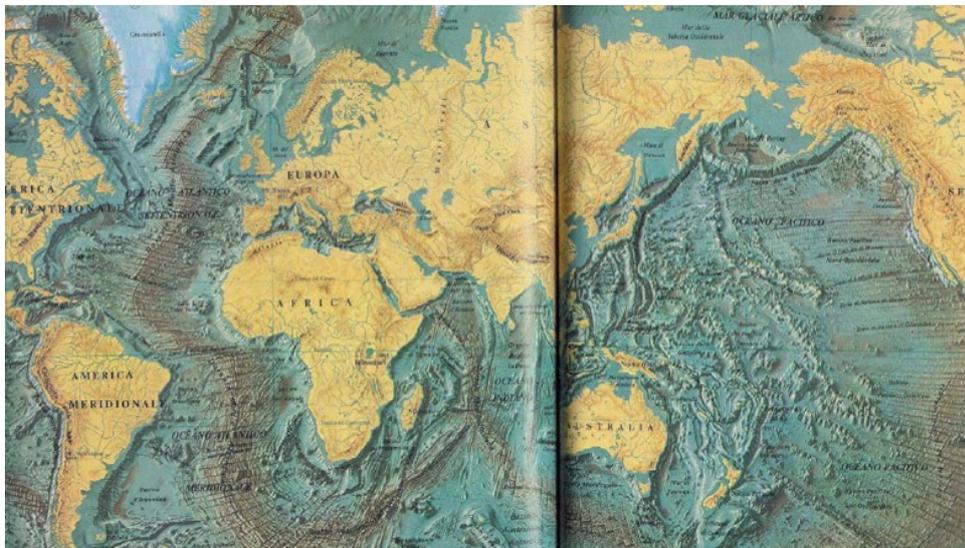


**Zone di subduzione e piano di Benioff**



**Evidenze della tettonica a placche**

Le conferme sostanziali della tettonica a placche sono venute nel corso degli **ultimi decenni**, oltre che dallo studio della sismicità terrestre, da settori diversi della geofisica- ad esempio gli studi sul **paleomagnetismo residuo nei fondali oceanici** - e, più recentemente e in misura decisiva, della **geodesia** attraverso le osservazioni via satellite (**GPS**).



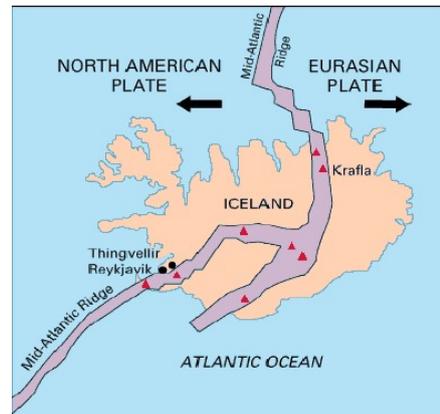
**Dorsali oceaniche in un rilievo del fondo del mare**

Dalle dorsali oceaniche (grandi fratture che corrono in mezzo agli oceani) fuoriesce materiale crostale "giovane", inizialmente allo stato magmatico che produce un assottigliamento progressivo della crosta oceanica.

## Dorsale oceanica in Islanda

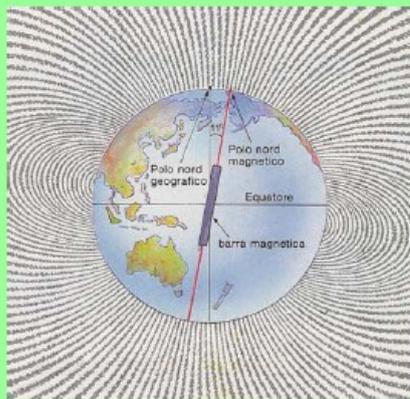


Vista aerea dell'area di Thingvellir, Islanda, che mostra una spaccatura (in ombra) che rappresenta un tratto della dorsale oceanica (Mid-Atlantic Ridge). A sinistra vi è la placca Nord- Americana che si apre verso W rispetto alla placca Euroasiatica, posta sulla destra.



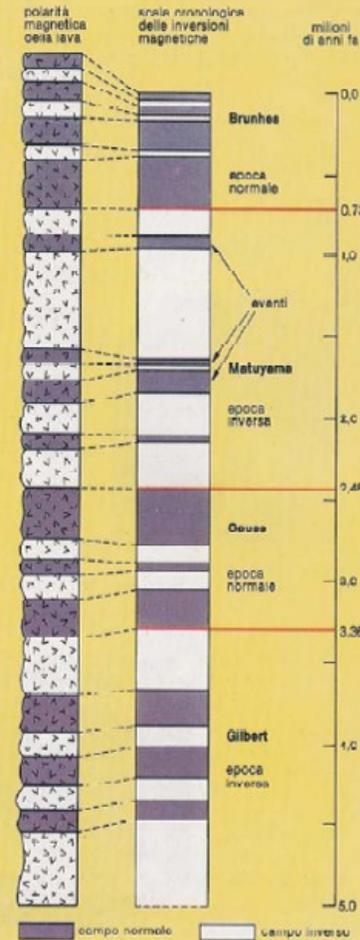
## Evidenze della tettonica a placche 3/6

### Paleomagnetismo

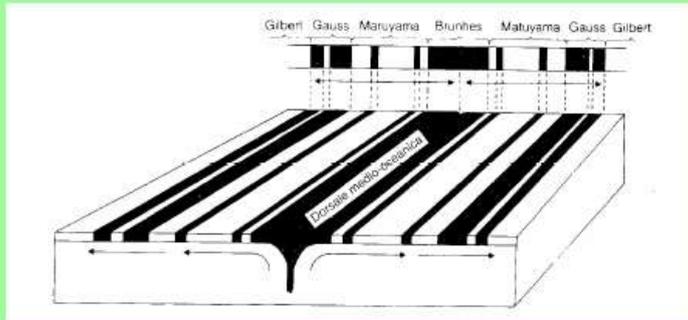


### Campo magnetico terrestre

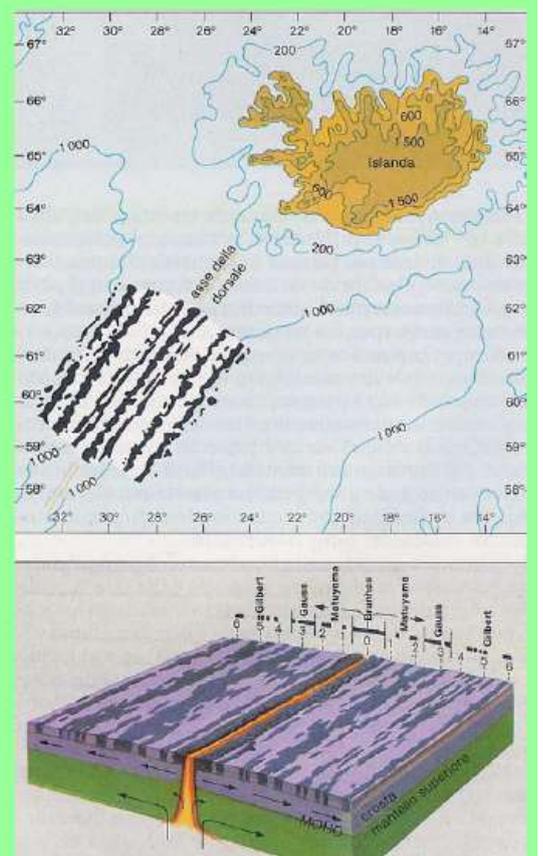
Inversione di polarità del campo magnetico terrestre nel corso degli anni



## Paleomagnetismo

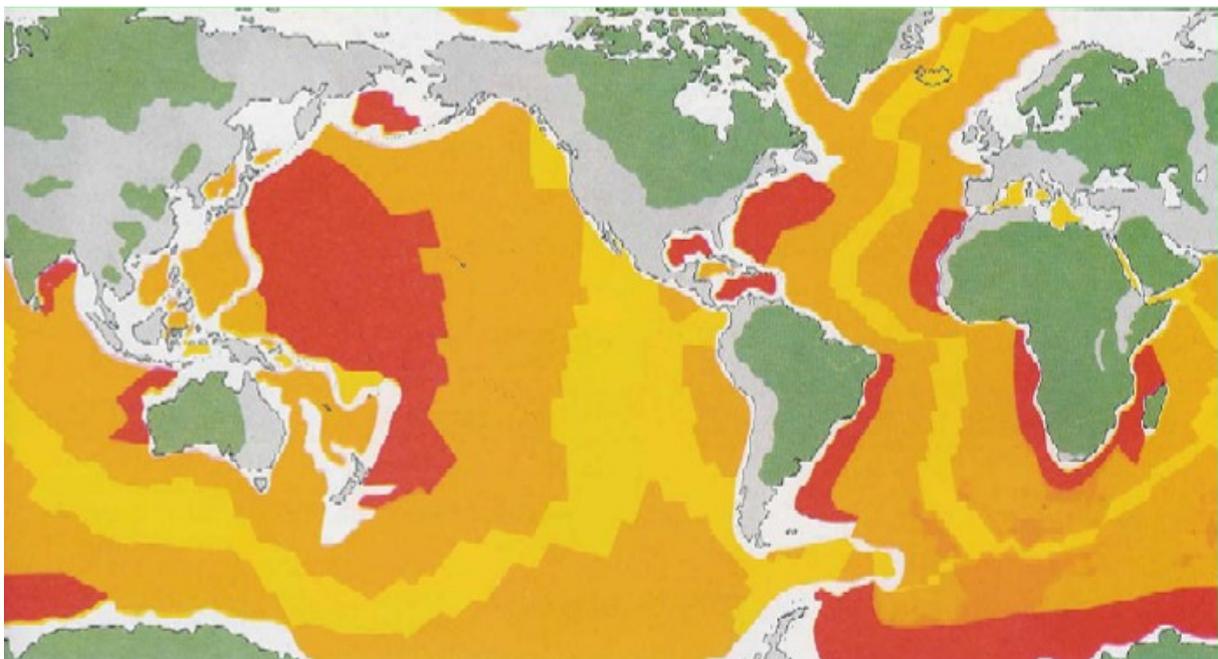


Sul fondo oceanico sono state osservate delle inversioni di polarità simmetriche rispetto alla dorsale

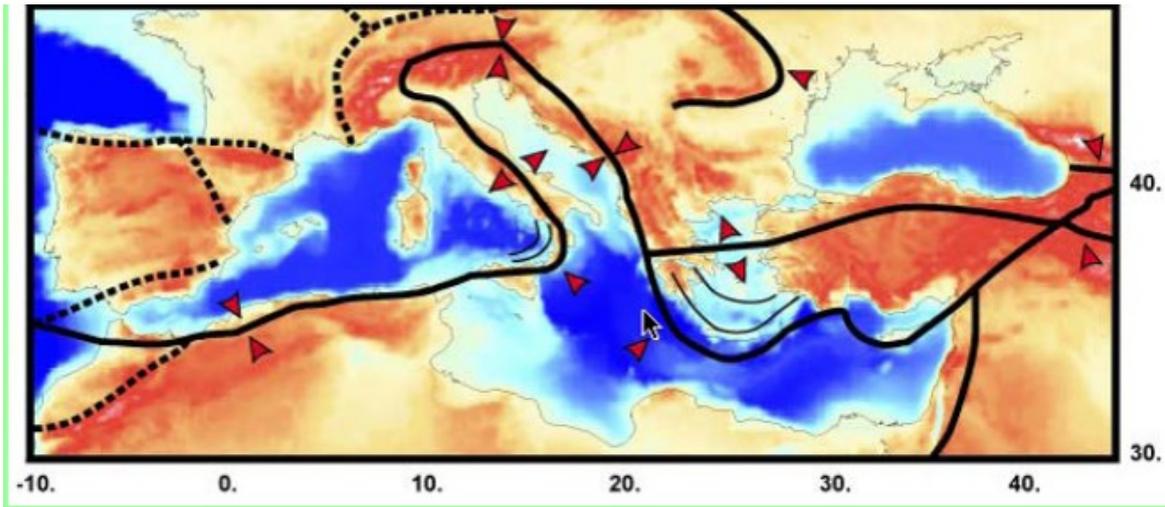


## ETÀ DELLE ROCCE

Dalle più recenti alla più antiche: giallo, ocra, rosso, grigio, verde



# Tettonica dell'area Euro-mediterranea



Nel bacino del Mediterraneo convivono zone sismogenetiche a tettonica diversa:

- zone a **tettonica compressiva**, caratterizzate sia da inspessimento crostale (es. la catena alpina, le Dinaridi e il Montenegro) che da **subduzione** (es. Tirreno meridionale, arco ellenico, indicati con linee curve in figura),
- zone a **tettonica distensiva**, come il mar Egeo o l'Appennino.
- zone a **tettonica trascorrente** (es. la faglia Nord Anatolica)

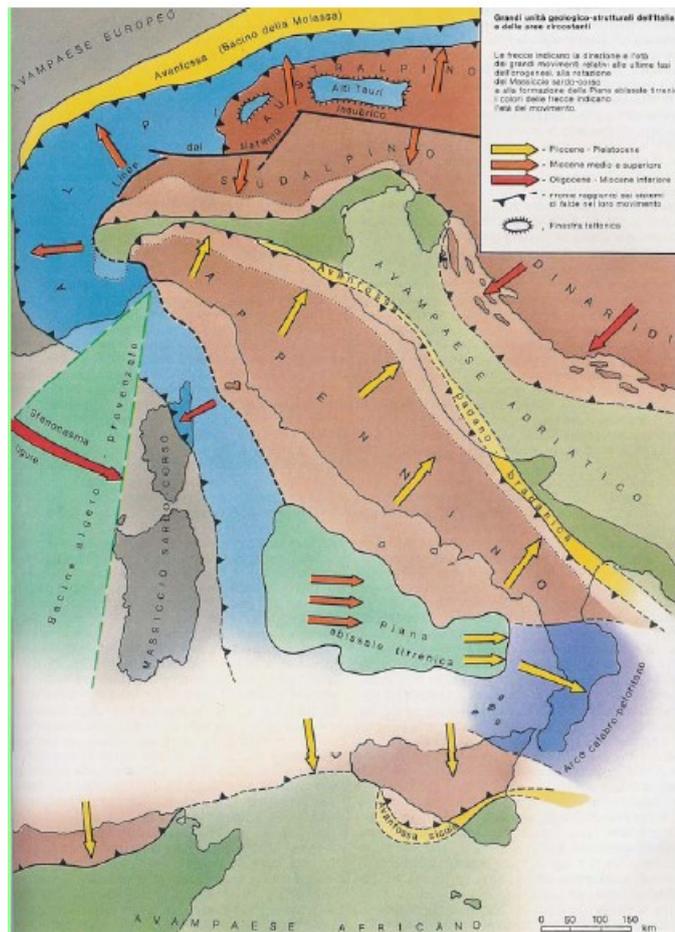
**In Italia i terremoti sono quasi sempre a profondità crostali (0-30 km) ad eccezione della zona di subduzione del basso Tirreno (fino a 200-300 km)**

## Grandi unità geologico-strutturali dell'Italia e delle aree circostanti

Le frecce indicano la direzione e l'età dei grandi movimenti relativi alle ultime fasi dell'orogenesi, alla rotazione del Massiccio sardo-corso e alla formazione della Piana abissale tirreni. I colori delle frecce indicano l'età del movimento.

- Pliocene - Pleistocene
- Miocene medio e superiore
- Oligocene - Miocene inferiore
- Fronte raggiunto dai sistemi di falde nel loro movimento

ERA	PERIODO	Milioni di anni fa
Era Neozòica	Olocène	0.01
	Pleistocène	1.8
Era Cenozòica	Pliocène	7
	Miocène	23
	Oligocène	34
	Eocène	53
	Paleocène	65



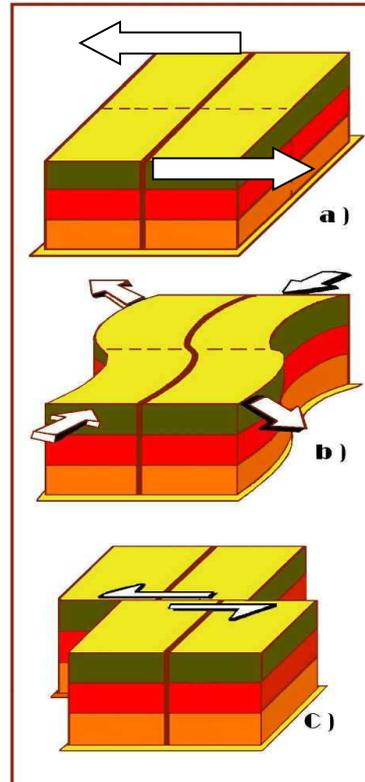
## Origine dei terremoti

### *Teoria del Rimbalzo Elastico (Reid 1910)*

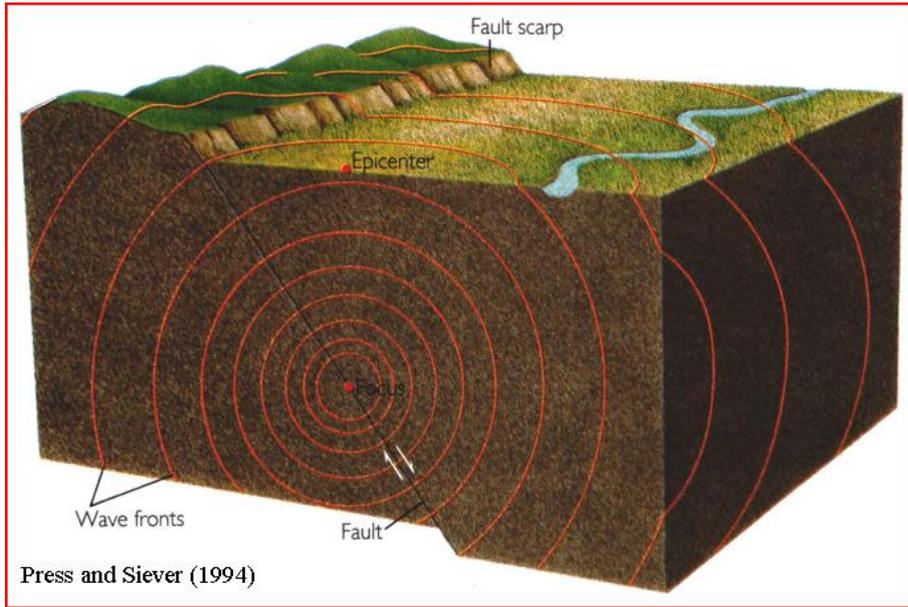
A causa delle forze che agiscono sulla crosta, questa si deforma accumulando tensioni all'interno delle rocce.

Aumentando lo sforzo applicato, la roccia continua a **deformarsi** proporzionalmente all'energia accumulata **fino a raggiungere il limite di rottura** che dipende dalla natura e dalle condizioni fisiche di temperatura, pressione, presenza o meno di fluidi, etc. in cui si trova la roccia.

A quel punto la massa rocciosa si rompe creando una **frattura** nella crosta terrestre (**faglia**) in corrispondenza della quale si verifica un movimento relativo dei due blocchi di roccia e si ha la liberazione di energia sotto forma di onde elastiche.



## Propagazione delle onde sismiche dall'ipocentro di un terremoto



Il punto all'interno della terra dove si genera la rottura si chiama **fuoco** o **ipocentro** del terremoto; il punto corrispondente sulla superficie terrestre è l'**epicentro**. Le onde sismiche si irradiano a partire dalla sorgente. Il terremoto viene generato da un movimento improvviso lungo la **faglia**. Per terremoti di elevata energia, la rottura si propaga fino in superficie producendo una **scarpata di faglia**.

## Equation of motion and Hooke's law

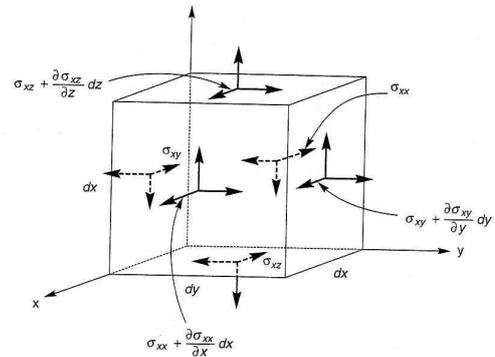
Up to this point we have been discussing a medium in static equilibrium. Consider now what happens if stresses are not in equilibrium. Consider a small volume  $dx_1 dx_2 dx_3$ ; the stresses on the front face of the volume in direction  $x_1$  are:

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \quad \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \quad \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3$$

Rear face stresses                      Net unbalanced stresses

These stresses act on a face that has an area  $dx_2 \cdot dx_3$  and they affect the volume  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$ ; hence we get for the **total force per unit volume in the direction of  $x_1$  axis**:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}$$



The small volume (density  $\rho$ ) is displaced from its equilibrium position so that  $u_1, u_2, u_3$  are the components of the displacement vector. The components of its acceleration are the second derivatives of  $u_1, u_2, u_3$  with respect to time. The **Newtonian equation of motion ( $ma = f$ )** takes the form

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}$$

2 analogous equations hold for the forces acting on  $u_2, u_3$  axes

This set of 3 equations is called the **equation of motion** for a continuum. The inertial terms on the left, relate the density-weighted accelerations to the stress gradients in the medium. **This is the most fundamental equation in seismology** as it relates forces in the medium to measurable displacements.

In order to represent the right hand side of the 3 differential equations in term of displacements  $u$ , we need to express the stress as a function of strain through the **HOOKE'S LAW** stating the linear proportionality between stress  $\sigma$  (internal force per unit area) and strain  $\epsilon$  (change in dimension equal to the derivative of the displacement)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Away from the seismic source the strains in seismic waves are very small, well within the elastic portion of the stress-strain curve of all rocks

In case of an isotropic medium (whose properties are independent of direction) the 21 independent elastic moduli reduce to **2 coefficients, called the Lamè constants  $\lambda$  and  $\mu$**

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

**Introduction of Hooke's law into the equation of motion allows us to derive the basic equations for displacement fields in an isotropic elastic material**

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \theta + 2\mu \epsilon_{11} \\ &= \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \sigma_{12} &= 2\mu \epsilon_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{13} &= 2\mu \epsilon_{13} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \end{aligned}$$

assuming that  $\lambda$  and  $\mu$  are constant throughout the medium (**homogeneous**) gives

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1$$

and similarly from the  $u_2$  and  $u_3$  equations

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3.$$

Recognising in the formula of the previous slide that the first term in brackets is  $\theta$  and the second is the Laplacian of  $u_1$  we have

$$\theta = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

The Laplacian of a scalar field is the divergence of the gradient:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = \phi, ii,$$

The Laplacian of a vector is a vector with comp that are the Laplacians of the original components

We can write these 3 equations in the equivalent vectorial form ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = \theta$ )

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u},$$

This is the three-dimensional vector equation of motion for an homogeneous isotropic linear elastic medium

### Wave equation. Body Waves (P and S)

The most general mathematical statement of the properties of wave propagation is included in the standard partial differential equation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi$$

Where  $\phi$  can be a scalar or a vector and the wave equation **relates a time derivative of a displacement (left side) to spatial derivatives (right side); the constant of proportionality is the square of the wave velocity c.**

It can be demonstrated that the only two possible solutions of the equation of motion for an homogeneous isotropic linear elastic medium (previous page) are the following:

$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \ddot{\phi} = 0$	<b>P waves scalar equation</b>	$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$	<b>P waves velocity</b>
$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{\beta^2} \ddot{\Psi} = 0,$	<b>S waves vector equation</b>	$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	<b>S waves velocity</b>

The first is a wave equation for the **scalar**  $\phi$ , corresponding to **P waves** with velocity  $\alpha = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ . These waves are physically identical with sound waves and ordinarily constitute the first arrival on recorded seismograms (*undae Primae*); the **vibration is longitudinal to the direction of propagation**; the corresponding deformation is **compressional or dilatational** and the wave in mathematical terminology is **irrotational**.

The second is a wave equation for the **vector**  $\psi$  corresponding to **S waves** with velocity  $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$ . These waves can exist **only in solids** and usually constitute the second arrival on recorded seismograms (*undae Secundae*); the **vibration is transverse** at right angles to the ray (usually  $\psi$  is decomposed in two components **SV** and **SH**, respectively perpendicular and parallel to the ground surface); the corresponding deformation is a **pure shear** and the wave in mathematical terminology is **solenoidal**.

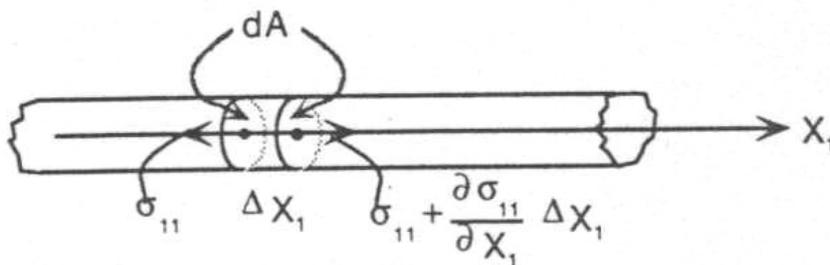
Theory shows that P and S waves are in fact the *only* transient solutions to a small stress imbalance in a isotropic homogeneous elastic space; thus together they provide a *complete* solution for the displacement equation of motion.

In case of a Poisson solid  $\lambda = \mu$  and

$$\alpha = \sqrt{3}\beta = 1.73\beta$$

## One dimensional wave solutions

Imagine to have a rod subjected only to longitudinal stresses



In this case the equation of motion becomes:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{x_1} &= m\ddot{u}_1 = \rho \Delta A \Delta x_1 \ddot{u}_1 \\ &= \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1 \right) \Delta A - \sigma_{11} \Delta A,\end{aligned}$$

where  $\rho$  is the density of the rod. This gives

$$\rho \ddot{u}_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}.$$

As our constitutive law we use  $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ , where  $E$  is Young's modulus which gives

$$E \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Defining  $c = (E/\rho)^{1/2}$ , we have a one-dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}. \quad (2.60)$$

The general solution of (2.60) is

$$u_1(x_1, t) = f(x_1 - ct) + g(x_1 + ct), \quad (2.61)$$

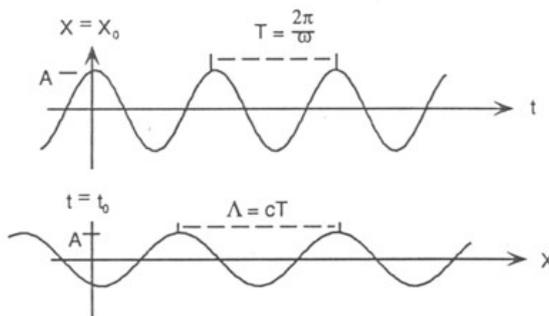
which is called *D'Alembert's solution*.

This solution represents two waves travelling along the  $x_1$  axis in opposite directions with velocity  $\mathbf{c}=(E/\rho)^{1/2}$ . The disturbance is the same everywhere in a plane perpendicular to  $x_1$  axis. This type of wave is a **plane wave**. The quantity  $(\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{c}t)$  is the **phase**. The surfaces on which the phase is constant are the **wavefronts**. A line denoting the direction of wave travelling and perpendicular to the wavefront is called **raypath**.

It can be shown that, given the initial and boundary conditions, the solution for a one dimensional plane wave  $u_1(x_1,t)$  is satisfied by simple harmonic functions periodic in time with period  $T$  and in space with wavelength  $\lambda$ .

$$u(x,t) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos 2\pi (t/T - x/\lambda)$$

Period	$T$	$T = 1/f = 2\pi/\omega$
Frequency	$f$	$f = \omega/2\pi = c/\lambda$
Wavelength	$\lambda$	$\lambda = cT = 2\pi/k$
Wavenumber	$k$	$k = 2\pi/\lambda = \omega/c$
Velocity	$c$	$c = \omega/k = f\lambda$



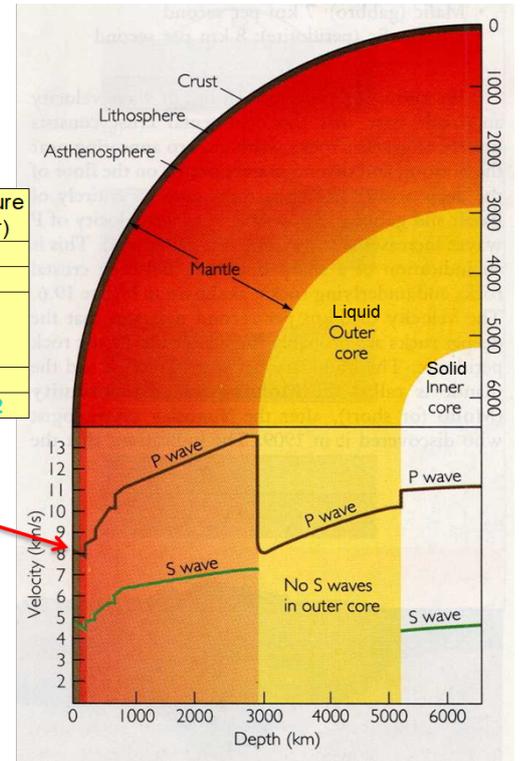
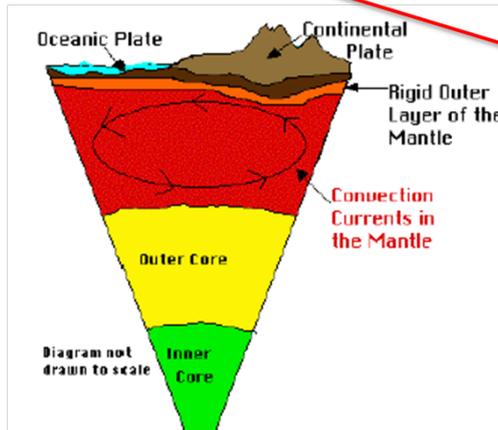
## COMPRESSIONAL AND SHEAR WAVE VELOCITIES IN ROCK

In general seismic waves have frequencies between about **0.3 mHz and 100 Hz**. For a typical seismic wave velocity of **5 km/s** this involves signal **wavelengths** between **15,000 and 0.05 km**. These waves **intrinsically sample very different characteristics of the Earth**.

Earth's interior is not an homogeneous medium. It can be considered as a **layered structure** whose mechanical properties vary with depth remaining nearly constant in layers of different thickness

	Depth	Vp (km/s)	Vs (km/s)	Density (g/cm <sup>3</sup> )	$\mu$ (kbar)	pressure (kbar)
Surface	0-100 m	0.17-2.6	0.1-1.5	1.0	0	0
Upper crust	3 km	5.8	3.2	2.6	266	0.5
Lower crust	30-70 km continent 3-15 km ocean	6.8	3.9	2.9	441	6.0
MOHOROVIC DISCONTINUITY						
Upper mantle	40 km	8.1	4.5	3.4	680	11.2

$10^8 \text{ N/m}^2$



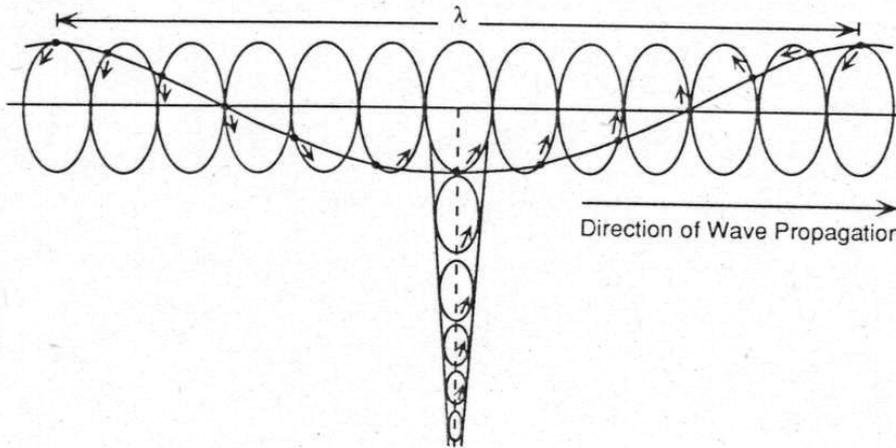
## Surface Waves

In an infinite homogeneous isotropic medium only P and S waves exist. The presence of the free surface of the Earth generates other types of waves called **surface waves** because they are confined to the vicinity of the surface

## Raleigh waves

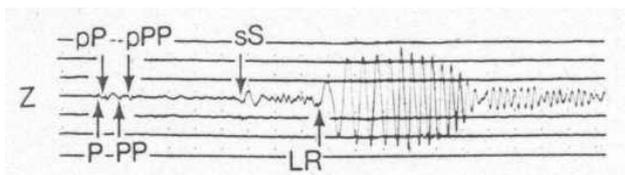
It was Lord Raleigh (1885) who first proved the existence of surface waves due to the interaction of incident P and SV waves with the free surface, giving rise to an interference wave that effectively travels along the surface involving a combination of longitudinal and transverse motion. These waves are designated with **LR** (*undae Longae Raleigh*)

As for **sea waves**, the particle motion is confined to the vertical plane and during the passage of the wave a particle describes an **elliptical path with a retrograde motion**.

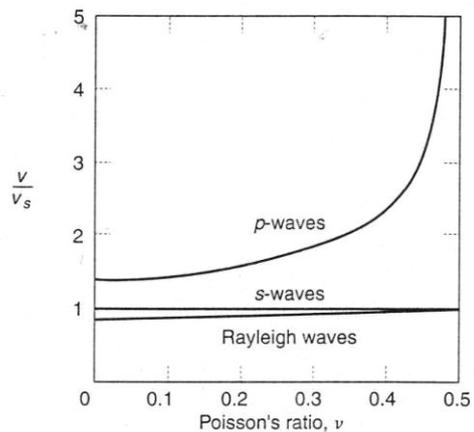


The amplitude of the wave decreases exponentially with depth in the form  $e^{-2\pi z/\lambda}$ .

In an homogeneous half-space, the velocity of Rayleigh waves does not depend on frequency. In case of a **layered structure**, Rayleigh waves show **dispersion** [ $V=V(\omega)$ ]. Because the velocity in the Earth increases with depth, the longer wavelengths tend to sample faster material, giving rise to **higher velocities for larger wavelengths** or lower frequencies.



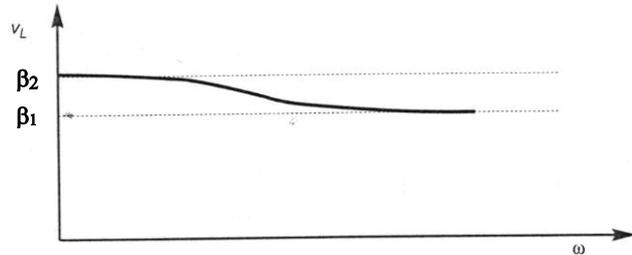
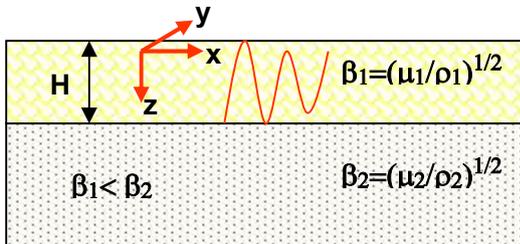
... : lower-frequency components of LR arrive earlier because of dispersion. Rayleigh-wave motions persist for over 10 min and produce the largest ground motions on the seismogram. (From Simon, "Earthquake Interpretations: A Manual for Reading Seismograms," Copyright©1981 William Kaufmann, Inc.)



**The velocity of Rayleigh waves depends on Poisson's ratio and is always slightly lower than S-waves velocity. For  $\nu=0.25$   $V_R=0.92 V_S$**

### Love waves

In a homogeneous elastic half-space, only P, S and Rayleigh waves can exist. **If the half-space is overlain by a layer of material with lower velocity, Love waves can develop** (Love 1927). Love waves are designated with **LQ** (*undae Longae Quervellen*) and consist of **SH waves that are trapped by multiple reflections within the surficial layer**. Total reflection of SH waves at the free surface combines with internal layering of the earth to trap SH reverberations near the surface, which interfere producing horizontally propagating Love waves.



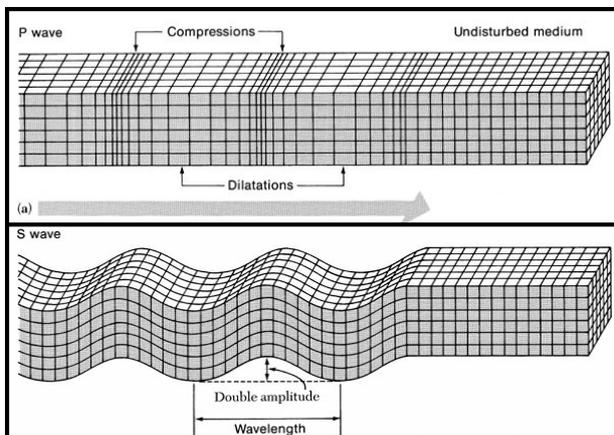
Variation of Love wave velocity with frequency.

The particle displacement is only **parallel to the surface without either vertical or longitudinal components**. A Love wave traveling in the **x** direction would involve displacements only in the **y** direction (**SH-wave motion**)

$$\beta_1 < v_L < \beta_2$$

Love wave velocities range from the S-wave velocity of the half space (at low freq.) to the S-wave velocity of the surficial layer (at high freq.). The frequency dependence indicates that **Love wave are dispersive**

from Kramer - 1996



### BODY WAVES ( P AND S)

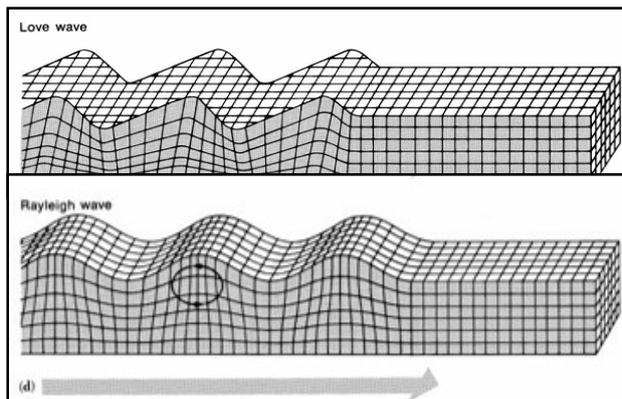
**P waves velocity**  
 in rock ~ 5.5 km/s  
 In water ~ 1.5 km/s  
 In air ~ 0.3 km/s

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

**S waves velocity**  
 in rock ~ 3.0 km/s  
 In water doesn't propagate

$$\beta = \sqrt{\mu/\rho} \approx \alpha/\sqrt{3}$$

### SURFACE WAVES (LOVE AND RAYLEIGH - LQ, LR)



**Love waves velocity**  $\beta_1 < v_L < \beta_2$

**Rayleigh waves velocity**  $v_R \approx 0.92 \beta$